گاه‌نامه بازی-ریاضی

گاه‌نامه سرگرمی‌های ریاضیات

www.mathgame.ir

گادفری هارولد هاردی

(۱۸۷۷-۱۹۴۷م.، انگلیس):

ریاضیات نازیبا ماندنی نیست.

هیچ پژوهش انسانی نمی‌تواند ادعای علمی بودن داشته باشد، مگر این که از برهان ریاضی برخوردار باشد.

لئوناردو داوینچی

شماره اول، زمستان ۱۳۹۰ صفحه ۱

برگزاری نخستین دوره مسابقات حل مساله غیرحضوری

نخستین دوره مسابقات حل مساله غیرحضوری با حضور ۷ نفر برگزار شد که البته ۲ نفر از شرکت‌کنندگان در مراحل میانی برگزاری مسابقه از ادامه مسابقه انصراف دادند.

مسابقه در ۵ مرحله انجام شد که در این شماره به ارائه پاسخ‌های سوالات و جزئیات نتایج مسابقه می‌پردازیم.

برگزاری هشتمین دوره مسابقات بازی-ریاضی

هشتمین دوره مسابقات بازی ریاضی در اسفندماه سال جاری با حضور ۳۲ تیم برگزار خواهد شد. در این مسابقات ۴ تیم منتخب دانش‌آموزی (دوتیم دختران و دو تیم پسران) حضور خواهند داشت. همچنین این دوره، نخستین دوره مسابقات در سطح استان‌های خراسان می‌باشد.

زمان دقیق برگزاری در وب‌سایت مسابقات اعلام می‌شود.

برگزاری مسابقه شهر ریاضی ویژه دهه فجر

نخستین دوره مسابقات حل مساله غیرحضوری با حضور ۷ نفر برگزار شد که البته ۲ نفر از شرکت‌کنندگان در مراحل میانی برگزاری مسابقه از ادامه مسابقه انصراف دادند.

مسابقه در ۵ مرحله انجام شد که در این شماره به ارائه پاسخ‌های سوالات و جزئیات نتایج مسابقه می‌پردازیم.

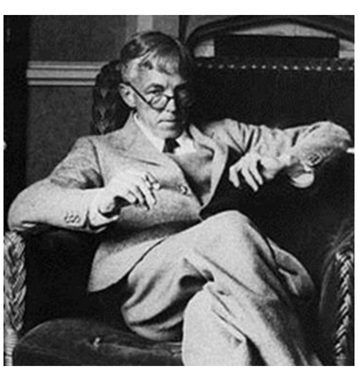
1) 'Generality' is an ambiguous and rather dangerous word, and we must be careful not to allow it to dominate our discussion too much. It is used in various senses both in mathematics and in writings about mathematics...

۱) عمومیت، واژه‌ای مبهم و تقریباً خطرناک است و ما باید مراقب باشیم اجازه ندهیم بیش از حد بر مباحث ما تاثیر بگذارد. این واژه در هر دو حوزه‌ی خود ریاضیات و نوشته‌های درباره‌ی ریاضیات، به معانی مختلف مورد استفاده قرار گرفته است.

2) there was *something* noble in the ambitions of Attila or Napoleon; but the noblest ambition is that of leaving behind something of permanent value

۲) در بلندپروازی‌های آتیلا و ناپلئون، چیزی شریف وجود داشت، اما شریف‌ترین جاه‌طلبی پشت سر گذاشتن چیزهایی است که ارزش جاوید دارند.

از کتاب دفاعیات یک ریاضیدان



فراخوان همکاری در نشریه اینترنتی بازی-ریاضی

نشریه اینترنتی بازی-ریاضی وابسته به وب‌سایت رسمی مسابقات بازی-ریاضی از تمام علاقه‌مندان جهت همکاری در بخش‌های طراحی گرافیک، خبر و مطالب مربوط دعوت به همکاری می‌نماید.

لازم به ذکر است که فعالیت‌های این گروه بودن هیچ گونه پشتوانه‌ی مالی و تنها در جهت افزایش کیفیت دید علمی در کنار ترویج استفاده از روش‌های جذاب برای آموزش ریاضیات انجام می‌گیرد.

پرسش‌ها و پاسخ‌های مسابقه غیرحضوری

پرسش ۱)

فرض کنید یک دنباله‌ی صعودی اکید از ۳۲ عدد داریم. می‌خواهیم مکان یک عد خاص x (که مطمئن هستیم در دنباله وجود دارد) را در دنباله بیابیم. هر بار می‌توانیم یکی از مکان‌های دنباله را انتخاب کنیم. یک گزاره به ما داده می‌شود که مشخص می‌کند عدد مکان انتخاب شده از x بزرگ‌تر یا کوچکتر است یا مساوی آن است. (۱۰۰ امتیاز)

۱) حداقل تعداد انتخاب‌ها برای یافتن مکان عدد x چقدر است؟

۲) حداکثر تعداد انتخاب‌ها برای یافتن مکان عدد x چقدر است؟

۳) متوسط تعداد انتخاب‌ها برای یافتن مکان عدد x چقدر است؟

پاسخ

(۱) پاسخ قسمت (۱) به راحتی «یک انتخاب» خواهد بود و آن هنگامی است که اولین مکان انتخابی (به صورت تصادفی) شامل x باشد. در صورتی که اصرار بر دقیق‌تر بودن پاسخ دارید، می‌توان ذکر کرد که با «صفر انتخاب» نمی‌توان مکان x را یافت. بنابراین «یک» کمترین تعداد انتخاب است.

همچنین دقت می‌کنیم که با هر روشی که انتخاب‌ها را انجام دهیم، ممکن است اولین انتخاب مکان x را مشخص کند. بنابراین: نه تنها به طور کلی، بلکه در هر روشی حداقل تعداد انتخاب‌ها برابر با «یک» است.

(۲) حل سوال فوق در قسمت (۲) به کمی دقت نیاز دارد.

ابتدا، چون در صورت سوال ذکر نشده که انتخاب یک مکان در دنباله نمی‌تواند تکراری باشد، بنابراین پاسخ قسمت (۲) به راحتی «بی‌نهایت انتخاب» خواهد بود. زیرا در یک حالت خاص می‌توانیم پیوسته مکان اول را انتخاب کنیم با اینکه عدد x در مکان اول نیست. بنابراین تعداد انتخاب‌ها بی‌نهایت خواهد بود.

حال بیایید فرض کنیم انتخاب تکراری مجاز نیست. چون سوال ما را مجبور به انتخاب روش خاصی نکرده است، بنابراین می‌توانیم روشی را انتخاب کنیم که در آن مکان‌های دنباله به ترتیب از ۱ تا ۳۲ انتخاب می‌شوند. در این حالت اگر x در مکان ۳۲ ام باشد، ما ۳۱ انتخاب انجام داده‌ایم. چون انتخاب تکراری نداریم پس بیشتر از ۳۲ انتخاب نیز وجود نخواهد داشت.

در صورتی که سوال شود در روش بهینه حداکثر تعداد انتخاب‌ها چند خواهد بود، آن‌گاه چون روش بهینه برای جستجوی یک دنباله‌ی یکنوا (صعودی یا نزولی) روش جستجوی دودویی است، بنابراین در این روش حداکثر تعداد انتخاب‌ها برابر $\log_2 32 = 5$ خواهد بود. زیرا در بدترین حالت، در هر انتخاب، نصف اعداد حذف می‌شوند. این کار تا آن‌جا پیش خواهد رفت که فقط یک عدد باقی بماند. یعنی بعد از ۵ بار نصف کردن اعداد باقی‌مانده.

(۳) در قسمت (۳) نیز روشی برای جستجو مشخص نشده است. بنابراین متوسط تعداد انتخاب‌ها کمی بی‌معنی به نظر می‌رسد. در صورتی که گفته شود روش جستجو خطی است (یعنی به ترتیب از مکان اول تا ۳۲ ام)، آن‌گاه باید تعداد انتخاب‌ها را برای یافتن مکان x در همه‌ی حالات محاسبه کرده و از آن میانگین گرفت.

اگر x در مکان اول باشد، با ۱ انتخاب مکان آن مشخص می‌شود، اگر x در مکان دوم باشد، با ۲ انتخاب مکان آن مشخص می‌شود و ... . بنابراین میانگین همه‌ی حالات برابر است با $\frac{1+2+\cdots+32}{32} = \frac{32\times 31}{2\times 32} = 15.5$.

در صورتی که روش دودویی مشخص شده باشد، نیز باید برای همه‌ی حالات تعداد انتخاب‌ها را محاسبه کرده و از آن میانگین گرفت.

a. در صورتی که x در مکان ۱۶ ام باشد، با ۱ انتخاب مکان آن پیدا می‌شود. بنابراین ۱ حالت ۱ انتخابی داریم.

b. در صورتی که x در مکان ۲۴ ام یا ۸ ام باشد، با ۲ انتخاب مکان آن پیدا می‌شود. بنابراین ۲ حالت ۲ انتخابی داریم.

c. به همین صورت ۴ حالت ۳ انتخابی، ۸ حالت ۴ انتخابی و ۱۶ حالت ۵ انتخابی داریم.

نکته: تا اینجا $1+2+4+8+16=31$ حالت را شمارش کردیم. یک حالت خاص باقی‌مانده مربوط به زمانی است که دو عدد باقی‌مانده است و مکان یکی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم. چه عدد x در مکان انتخاب شده باشد یا نباشد، ما پی به مکان x خواهیم برد. بنابراین، این حالت خاص نیز با ۵ انتخاب به دست می‌آید.

بنا بر چیزی که گفته شد میانگین تعداد انتخاب‌های همه‌ی حالت‌ها برابر است با: $\frac{1+2\times2+4\times3+8\times4+17\times5}{32}=4.21$

برای پاسخ دادن به این قسمت، مناسب‌ترین کار این است که فرض کنیم طراح سوال روشی را مورد نظر نداشته است و انتخاب تکراری نیز نخواهیم داشت. بنابراین باید فرض کنیم که در هر انتخاب، همه‌ی مکان‌ها برای انتخاب شده شانس برابر دارند. در این صورت تعداد حالاتی که در آن مکان x در انتخاب اول پیدا می‌شود، برابر ۳۲ است. همچنین تعداد حالاتی که در آن مکان x در انتخاب دوم پیدا شود، برابر 31×32 است. به همین ترتیب ادامه داده و از اعداد حاصل میانگین می‌گیریم.

توضیح جانبی:

در این مساله پرسش از تعداد متوسط انتخاب‌ها معادل این است که بپرسیم p چه عددی است که احتمال آن که با p انتخاب، مکان x پیدا شود، برابر $\frac{1}{2}$ است؟ این p نیز به روش وابسته است.

پرسش ۲)

مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۱۰ را در نظر بگیرید. (۱۲۰ امتیاز)

۱) تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه که مجموع اعضایشان زوج باشد چندتاست؟

۲) تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه که مجموع اعضایشان مضرب ۳ باشد چندتاست؟

۳) باقی‌مانده‌ی مجموع اعضای همه‌ی زیرمجموعه‌های این مجموعه، بر ۳ چند است؟

پاسخ

(۱) روش اول:

مجموعه‌ی $B=\{1,2,3,\dots,10\}$ را در نظر می‌گیریم. ابتدا عدد 10 را از مجموعه حذف می‌کنیم. مجموعه‌ی باقی‌مانده، به صورت $A=\{1,2,\cdots,9\}$ خواهد بود. تعداد زیرمجموعه‌های A برابر 2^9 است که آن‌ها را با $2^A=\{a_1,a_2,\dots,a_{2^9}\}$ نشان می‌دهیم. حال برای تولید کردن زیرمجموعه‌های B از 2^A استفاده می‌کنیم. به این صورت که 10 را به هر a_i $(i=1,\dots,2^9)$ یا اضافه می‌کنیم و یا نه. مثلاً فرض کنیم $a_5=\{1,4,5\}$. حال دو زیرمجموعه‌ی $b_5=a_5=\{1,4,5\}$ (بدون استفاده از 10) و $b_{5'}=\{1,4,5,10\}$ (با استفاده از 10) ساخته می‌شوند.

حال توجه کنید که هر a_i یا فرد است و یا زوج. بنابراین از دو مجموعه‌ی تولید شده‌ی b_i و $b_{i'}$ یکی با مجموع فرد و یکی با مجموع زوج خواهد بود. بنابراین 2^9 زیرمجموعه‌ی با مجموع فرد و 2^9 زیرمجموعه‌ی با مجموع زوج برای B ساختیم.

$$2^B=\left\{b_1,b_{1'},b_2,b_{2'},\dots,b_{2^9},b_{2^{9'}}\right\}$$

بنابراین از زیرمجموعه‌های تولید شده نیمی با مجموع فرد و نیمی با مجموع زوج هستند.

حال می‌ماند اثبات این که به شکل گفته شده، همه‌ی زیرمجموعه‌های تولید شده، متمایز هستند و همه‌ی زیرمجموعه‌های B را نیز تولید می‌کنند.

فرض کنید دو زیرمجموعه‌ی تولید شده یکسان باشند، یعنی $b_i = b_j$ یا $b_i = b_{j'}$ در حالت اول، چون 10 در هیچ کدام از دو مجموعه نیست، داریم: $a_i = b_i = b_j = a_j$، که تناقض است. در حالت دوم داریم، $10 \in b_{j'}, 10 \notin b_i$. پس دو مجموعه نمی‌تواند با هم برابر باشند. حال چون 2^{10} زیرمجموعه‌ی متمایز برای B تولید کردیم، پس همه‌ی زیرمجموعه‌ها تولید شده است.

در نتیجه پاسخ قسمت اول 2^9 است.

(۱) روش دوم:

ابتدا مجموعه‌ی $B = \{1,2,3,\dots,10\}$ را به دو زیرمجموعه‌ی اعداد زوج و فرد افراز می‌کنیم.

$$B_{odd} = \{1,3,5,7,9\}, B_{even} = \{2,4,6,8,10\}$$

هر زیرمجموعه‌ی B که با مجموع زوج باشد، باید به تعداد زوج از اعضای B_{odd} انتخاب کند. یعنی یا هیچ یا دو و یا چهار عضو از B_{odd} در هر زیرمجموعه با مجموع فرد وجود دارد. در نتیجه برای انتخاب از اعضای B_{odd}، $\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = 2^4$ انتخاب وجود دارد.

از طرف دیگر هر زیرمجموعه‌ی B که با مجموع زوج باشد، می‌تواند به تعداد دلخواه از اعضای B_{even} انتخاب کند. پس هر زیرمجموعه از B_{even} می‌تواند در هر زیرمجموعه با مجموع فرد وجود داشته باشد.

در نتیجه برای انتخاب از اعضای B_{even}، 2^5 انتخاب وجود دارد.

در نتیجه برای زیرمجموعه‌های با مجموع زوج، بنا بر اصل ضرب و با در نظر گرفتن B_{odd} و B_{even}، $2^5 \times 2^4 = 2^9$ انتخاب وجود دارد.

(۲)

تعمیم روش دوم از قسمت (۱) را در نظر می‌گیریم. برای این منظور مجموعه‌ی $B = \{1,2,3,\dots,10\}$ را به سه زیرمجموعه‌ی زیر افراز می‌کنیم:

$$B_0 = \{3,6,9\}, B_1 = \{1,4,7,10\}, B_2 = \{2,5,8\}$$

هر زیرمجموعه‌ی با مجموع مضرب ۳ می‌تواند به هر تعداد دلخواه از اعضای B_0 را انتخاب کند یعنی 2^3 حالت.

برای انتخاب از اعضای B_1 و B_2 چهار حالت داریم.

حالت اول) به تعداد برابر از B_1 و B_2 عضو انتخاب کنیم. بنابراین تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$\underbrace{\binom{4}{0}\binom{3}{0}}_{1} + \underbrace{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}_{12} + \underbrace{\binom{4}{2}\binom{3}{2}}_{18} + \underbrace{\binom{4}{3}\binom{3}{3}}_{4} = 35$$

حالت دوم) سه عضو از B_1 و هیچ عضو از B_2 انتخاب کنیم. در این حالت 4 انتخاب داریم.

حالت سوم) سه عضو از B_2 و هیچ عضو از B_1 انتخاب کنیم. در این حالت 1 انتخاب داریم.

حالت چهارم) چهار عضو از B_1 و یک عضو از B_2 انتخاب کنیم. در این حالت 3 انتخاب داریم.

بنا بر اصل جمع در مجموع $35 + 4 + 1 + 3 = 43$ انتخاب از اعضای B_1 و B_2 داریم. در نتیجه بنا بر اصل ضرب، در مجموع $43 \times 8 = 344$ زیرمجموعه با مجموع مضرب ۳ داریم.

(۳)

مجموع اعداد زیرمجموعه‌های $B = \{1,2,3,\dots,10\}$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$2^9 \times (1 + 2 + \cdots + 10)$$

چون هر عدد در 2^9 تا از زیرمجموعه‌ها وجود دارد. بنابراین

$$2^9 \times (1 + 2 + \cdots + 10) \equiv (mod\ 3)2$$

پرسش ۳)

برنامه‌نویسان یک شرکت با ویروسی مواجه شده‌اند که اطلاعات آن‌ها را به هم ریخته است. تنها مقداری از اطلاعات باقی مانده است. (۶۰ امتیاز)

آ. نسترن اکاتی برنامه‌ای به زبان $C++$ نوشته است.

ب. کسی که برنامه‌ی حسابداری را نوشته است، هم اتاق کسی است که با زبان بیسیک برنامه‌نویسی می‌کند.

ج. برنامه‌ی تولید توسط هلیا مهران‌نژاد نوشته شده است.

د. آلاله احمدیان برنامه‌ی حسابداری را ننوشته است.

ه. برنامه‌ی تولید به زبان بیسیک نوشته نشده است.

و. کسی که از زبان پاسکال استفاده می‌کند برنامه‌ی کارگزینی را نوشته است.

ز. زبان فرترن توسط نسیم جاهدیان به کار نرفته است.

ح. زبان بیسیک برای نوشتن برنامه پرسنلی به کار رفته است.

حال می‌توانید تعیین کنید کدام برنامه توسط کدام کارمند و با چه زبانی نوشته شده است؟ اگر نه آیا می‌توانید گزاره‌ای به گزاره‌ها اضافه کنید تا مساله جواب داشته باشد؟

پاسخ (راه‌حل ارسالی از نسترن اکاتی با اعمال تصحیحات)

با توجه به اطلاعات داده شده می‌توانیم جدول زیر را رسم کنیم :

کارمند / اطلاعات	نسترن اکاتی	هلیا مهران نژاد		
زبان	C++		پاسکال	بیسیک
برنامه ی نوشته شده		تولید	کار گزینی	پرسنلی

حال چون تنها برنامه ی باقی مانده حسابداری است، پس نسترن اکاتی برنامه ی حسابداری را نوشته است.

چون تنها زبان باقی مانده فرترن است، هلیا مهران نژاد با این زبان برنامه نوشته است.

پس جدول به این صورت خواهد بود :

کارمند / اطلاعات	نسترن اکاتی	هلیا مهران نژاد		
زبان	C++	فرترن	پاسکال	بیسیک
برنامه ی نوشته شده	حسابداری	تولید	کار گزینی	پرسنلی

حالا برای پر کردن دو خانه ی خالی دو حالت مختلف داریم. یا آلاله احمدیان برنامه ی کارگزینی را نوشته یا نسیم جاهدیان و صورت سوال هیچ محدودیتی برای این دو برنامه قرار نداده است، پس برای محدود کردن این دو نفر احتیاج به یک گزاره ی دیگر هم داریم این گزاره می‌تواند این باشد :

نسترن اکاتی تنها هم اتاقی آلاله احمدیان است.

به این صورت چون در ابتدا گفتیم که کسی که برنامه ی حسابداری را نوشته هم اتاق کسی است که با بیسیک برنامه نوشته است، پس آلاله احمدیان با بیسیک برنامه نوشته است. (همین طور اگر کلمه‌ی تنها ذکر نگردد ممکن است آلاله با زبان پاسکال برنامه نوشته باشد و با نسترن و نسیم در یک اتاق باشد) جدول به این شکل درمی‌آید :

آلاله احمدیان	نسیم جاهدیان	هلیا مهران نژاد	نسترن اکاتی	کارمند / اطلاعات
بیسیک	پاسکال	فرترن	C++	زبان
پرسنلی	کار گزینی	تولید	حسابداری	برنامه ی نوشته شده

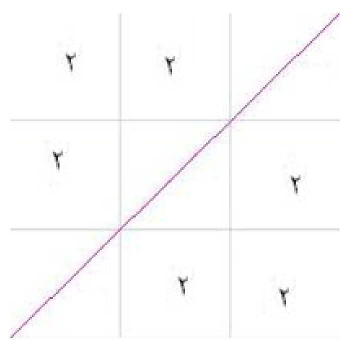
پرسش ۴)

یک مربع ۳ در ۳ داریم که از ۹ مربع کوچک تشکیل شده است. به چند طریق می‌توان یکی از قطرها را برای هر مربع داخلی رسم کرد به شرطی که هیچ کدام از قطرهای مربع بزرگ رسم نشود. (۱۲۰ امتیاز)

پاسخ (راه‌حل ارسالی از آلاله احمدیان با اعمال تصحیحات)

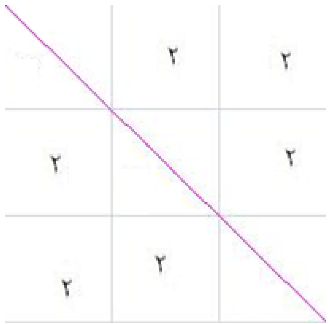
در کل 2^9 حالت برای پر کردن جدول داریم. دو حالت کلی بد (که باید از تعداد کل کم شوند) داریم:

الف) زمانی که فقط قطر اصلی کشیده شده باشد



در این حالت، 2^6 حالت بد داریم که باید از تعداد کل حالات کم شود.

ب) زمانی که فقط قطر دیگر کشیده شده باشد.



در این حالت، 2^6 حالت بد داریم که باید از تعداد کل حالات کم شود.

بنابراین در کل، $2^9 - 2^6 - 2^6 = 384$ حالت داریم.

پرسش ۵)

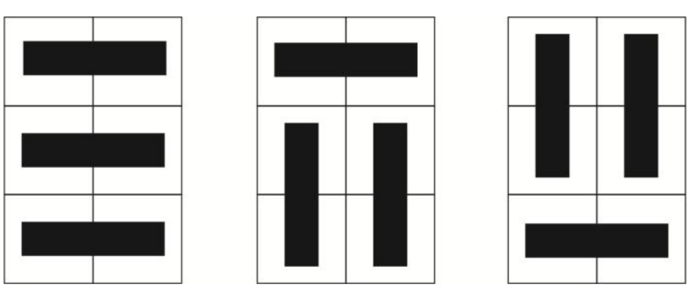
به چند طریق می‌توان یک جدول ۳ در n را با دومینوها (عمودی یا افقی) پر کرد؟ (۱۸۰ امتیاز)

(جدول باید کاملاً پر شود و دومینوها روی هم قرار نگیرند)

پاسخ

ابتدا توجه می‌کنیم که برای n های فرد، جوابی وجود ندارد. برای n های زوج سعی می‌کنیم با روش بازگشتی تعداد حالت‌ها را بشماریم.

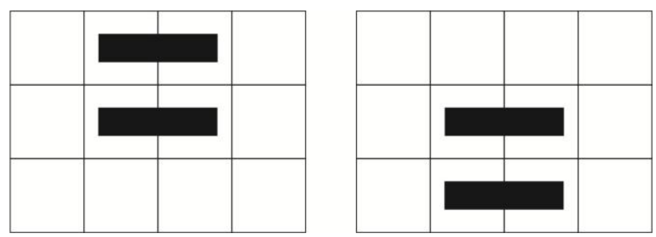
در حالت $n = 2$ تعداد حالت‌ها به صورت سرراست محاسبه می‌شود. (۳ حالت).



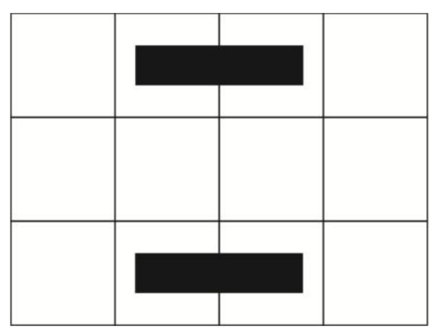
حال فرض کنیم $n = 4$. مستطیل را به دو مستطیل 3×2 افراز می‌کنیم. به دو حالت کلی می‌توان تعداد حالات را شمارش کرد.

حالت الف) اولین حالت این است که دو مستطیل به صورت مستقل از هم پر شوند (هر کدام به ۳ حالت). در این صورت $3 \times 3 = 9$ حالت داریم.

حالت ب) حالت دوم این است که دو مستطیل مستقل از هم پر نشوند. یعنی دومینویی وجود داشته باشد که یک خانه از مستطیل اول و یک خانه از مستطیل دوم را پر کند. بدیهی است که تعداد چنین دومینوهایی باید زوج باشد. بنابراین تنها حالت موجود این است که ۲ دومینو با این خاصیت موجود باشند. این ۲ دومینو تنها می‌توانند به دو صورت زیر قرار بگیرند.



باز هم بدیهی است که حالت زیر غیرممکن است



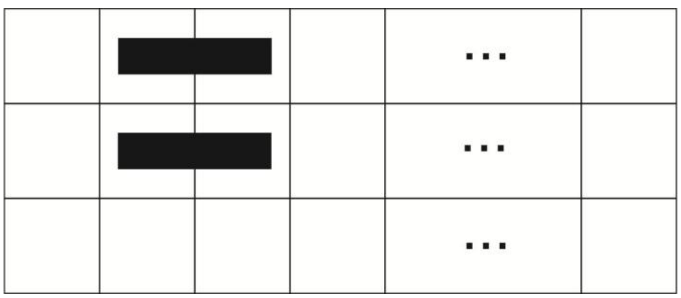
دو حالت ممکن، قرینه هستند. بنابراین کافی است تعداد حالات یکی از آن‌ها شمارش شود و حاصل در ۲ ضرب شود. در نهایت عدد به دست آمده را با عدد حالت (الف) جمع می‌کنیم.

حال فرض کنیم $n = 2k$ دلخواه باشد و فرض کنیم $f(n)$ تعداد حالات جواب برای n باشد.

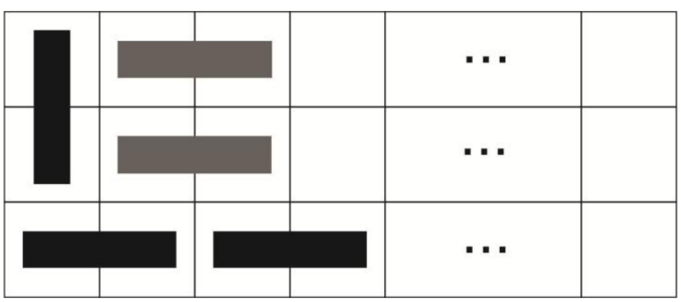
حالت (الف) و (ب) را با افراز مستطیل به یک مستطیل 3×2 و یک مستطیل $3 \times 2(k-1)$ بررسی می‌کنیم. حالت (الف) را به سادگی می‌توان حل کرد:

$$f(2) \times f(n-2) = 3f(n-2)$$

برای حالت (ب) شکل زیر را در نظر می‌گیریم. تعداد حالات پر کردن شکل زیر را با $g(n)$ نشان می‌دهیم. با یک روش بازگشتی، $g(n)$ را به دست می‌آوریم (که البته پس از شمارش حالات در ۲ ضرب می‌شود).



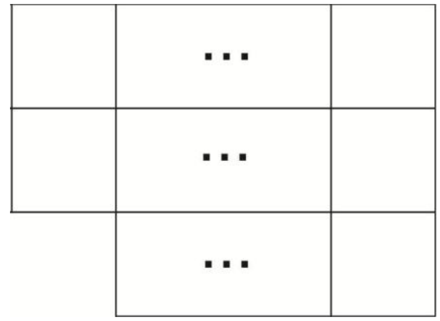
قسمت سمت چپ شکل اجباراً باید به شکل زیر پر شود:



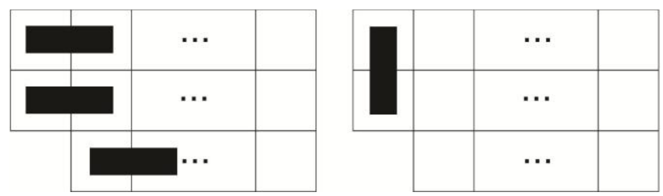
بنابراین می‌توان نوشت

$$f(n) = \underbrace{f(2) \times f(n-2)}_{\text{تعداد حالات (الف)}} + \underbrace{2g(n)}_{\text{تعداد حالات (ب)}} = 3f(n-2) + 2g(n) \qquad (*)$$

در واقع برای حالت (ب) باید تعداد حالات پر شدن شکل زیر را محاسبه کنیم



یعنی مستطیلی $(n-3)\times 3$ که خانه‌ی سمت چپ پایین آن حذف شده است. اگر تعداد حالات پر کردن این شکل را با $h(n-3)$ نشان دهیم، خواهیم داشت $g(n)=h(n-3)$. با در نظر گرفتن دو امکان پر کردن خانه‌ی بالا سمت چپ داریم:



تعداد حالات شکل سمت راست برابر $f(n-4)$ و تعداد حالات شکل سمت چپ برابر $h(n-5)=g(n-2)$ است. بنابراین داریم

$$
\begin{aligned}
g(n)=h(n-3)&=f(n-4)+h(n-5)\\
&=f(n-4)+g(n-2)
\end{aligned}
$$

بنابراین با جایگذاری در فرمول $(*)$ داریم

$$
\begin{aligned}
f(n)&=3f(n-2)+2g(n)\\
&=3f(n-2)+2h(n-3)\\
&=3f(n-2)\\
&\quad+2\big(f(n-4)+g(n-2)\big)
\end{aligned}
$$

حال با داشتن شرایط اولیه‌ی زیر، دنباله‌ی بالا حل می‌شود:

$$f(2)=3,\qquad f(4)=11,\qquad g(4)=2$$

به عنوان مثال $f(6)$ را محاسبه می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
f(6)&=3f(4)+2\big(f(2)+g(4)\big)\\
&=3\times 11+2(3+2)=45
\end{aligned}
$$

نمونه سوالات مسابقات بازی–ریاضی

در سال‌های گذشته دانشجویان و دانش‌آموزان بسیاری در مسابقات بازی–ریاضی شرکت کرده‌اند یا به گونه‌ای با آن آشنایی پیدا نموده‌اند. از این به بعد در هر شماره، تعدادی از بازی‌های سال‌های گذشته را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

سوال. چهار دسته مهره به تعداد ۱۲، ۲۹، ۲۱ و ۱۷ داریم. هر تیم در نوبت خود می‌تواند از یک و فقط یکی از دسته‌ها به انتخاب خود ۲ یا ۵ مهره برداشته و از بازی خارج کند. برنده کسی است که آخرین حرکت را انجام دهد. (هفتمین دوره مسابقات بازی–ریاضی، دور مقدماتی، گروه دانش‌آموزی)

الگوریتم برد. نشان می‌دهیم نفر اول روشی برای بردن دارد. ابتدا دقت کنید که $2+5=7$ و $21=3\times 7, 29=4\times 7+1$، یعنی در صورتی که این دو دسته‌ی مهره موجود باشد، بازیکن نفر دوم می‌تواند برنده باشد. زیرا تعداد حرکات را همواره زوج نگه می‌دارد. به این صورت که اگر بازیکن اول ۲ مهره از یک دسته برداشت، بازیکن دوم ۵ مهره از همان دسته برمی‌دارد و اگر بازیکن اول ۵ مهره از یک دسته برداشت، بازیکن دوم ۲ مهره از همان دسته برمی‌دارد. بنابراین در هر نوبت که دو بازیکن حرکت انجام می‌دهند، ۷ مهره از یک دسته کم می‌شود. در نتیجه در حرکت آخر ۱ مهره در دسته‌ی ۲۹ تایی باقی می‌ماند. اکنون نوبت بازکن اول است که حرکتی ندارد. بنابراین بازنده است. بازی زیر نمونه‌ای از اجرای این روش است:

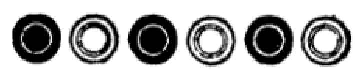
$$(21,29)\xrightarrow{\text{بازیکن اول}}(19,29)\xrightarrow{\text{بازیکن دوم}}(14,29)\xrightarrow{\text{بازیکن اول}}(14,24)\xrightarrow{\text{بازیکن دوم}}(14,22)\longrightarrow\cdots$$

در بازی مورد نظر، بازیکن اول می‌تواند در حرکت اول ۵ مهره از دسته‌ی ۱۷ تایی برداشته و بازی را متقارن نماید.

معمای این شماره

بازی مهره‌ها (برداشتی از کتاب The Moscow Puzzles)

شش همسایه به خوبی کنار هم زندگی می‌کردند. این همسایه‌ها یکی در میان به موسیقی سنتی (که در شکل با دایره سفید مشخص شده است) و پاپ (که در شکل با دایره سیاه مشخص شده است) علاقه داشتند. در اثر این تفاوت، بین همسایه‌ها مشکل ایجاد شد به صورتی که صدای موسیقی هر کدام از همسایه‌ها حداقل یک همسایه دیگر را آزار می‌داد. آن‌ها مشکل را به شهرداری گزارش دادند. شهرداری چهار خانه‌ی خالی در سمت چپ این خانه‌ها ساخت و به همسایه‌ها ۳ روز مهلت داد تا مشکل خود را حل کنند.



همسایه‌ها تصمیم گرفتند با اسباب‌کشی از خانه‌ی قبلی خود طوری قرار بگیرند که هر سه نفر که به موسیقی سنتی علاقه دارند در سمت چپ و هر سه نفر که به موسیقی پاپ علاقه دارند در سمت راست قرار بگیرند تا صدای موسیقی آن‌ها کمتر موجب آزار دیگران شود.

همسایه‌ها از شهرداری برای اسباب‌کشی، وسیله‌ی نقلیه درخواست کردند. در شهرداری فقط یک اتومبیل با دو واگن انتقال بار وجود داشت. بنابراین قرار شد در هر روز فقط دو همسایه‌ی مجاور اسباب‌کشی کنند. به دلیل صرفه‌جویی، ترتیب قرار گرفتن این دو همسایه در جریان تعویض خانه نباید عوض می‌شد.

تنها کسی که می‌توانست مشکل این همسایه‌ها را حل کند کاراگاه پرودو بود. بنابراین همسایه‌ها مشکل خود را برای کاراگاه پرودو توضیح دادند. پرودو نیز به سرعت روشی را مشخص کرد که همسایه‌ها بتوانند مقصود خود را عملی کنند. او این کار را چگونه انجام داده است؟

تاریخچه مسابقات بازی–ریاضی (۱)

مسابقات بازی–ریاضی اولین بار در سال ۱۳۸۳ توسط دانشجویان ارشد کمیته استعدادهای درخشان دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد، برگزار شد. سرپرستی این دوره از مسابقات را خانم دکتر هانیه میرابراهیمی (که هم‌اکنون عضو هیات علمی دانشگاه فردوسی می‌باشند) بر عهده داشتند که به گفته‌ی خود ایشان، ایده‌ی مسابقات از تدریس این مطلب توسط آقای دکتر مجید میرزاوزیری (عضو هیات علمی دانشگاه فردوسی مشهد) گرفته شده است.

در دوره‌ی اول مسابقات، ۱۶ تیم از دانشکده علوم ریاضی در مسابقات حضور یافتند که بسیاری از آنان هم‌اکنون دانشجویان دکتری ریاضی در دانشگاه‌های صنعتی شریف، تهران، فردوسی مشهد و ... هستند.

در سال‌های بعد، کمیته‌ی استعدادهای درخشان مسئولیت برگزاری را به صورت تدریجی به انجمن علمی محول کرد، به طوری که در سال ۱۳۸۴ مسابقه با همکاری انجمن علمی و در سال ۱۳۸۵ مستقیماً توسط انجمن علمی دانشکده و تحت سرپرستی آقای سعید محمودی هاشمی دبیر وقت انجمن علمی –که هم‌اکنون دوره‌ی کارشناسی ارشد را در دانشگاه تهران پشت سر می‌گذارد– برگزار گردید.

از سال ۱۳۸۶ به بعد، تیم اجرایی مسابقات بازی–ریاضی عملاً به صورت منسجم درآمد و مسابقه با عناوین مختلف برگزار گردید. ادامه‌ی مسابقات با افزایش تدریجی تعداد تیم‌های شرکت‌کننده از سراسر دانشگاه‌های مشهد، بسیار مطلوب برگزار شد.

دوره‌ی ششم مسابقات با ایده‌ی آقای سعید محمودی به صورت یک پروژه‌ی سه ماهه کلید خورد و مسابقات بازی–ریاضی دوره‌ی ششم در سطح دانشگاه‌های مشهد و با حضور تیم‌هایی از مدارس استعدادهای درخشان مشهد، شکل گرفت.